Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2020/2021

**Lineare Algebra I**
Blatt 5
Abgabe: 14.12.2020, 10 Uhr
**Gruppennummer angeben!**

**Aufgabe 1** (7 Punkte).
Sei $\mathbb{R}[T]$ der Polynomring mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ (siehe Appendix D im Skript). Beachte, dass $\mathbb{R}[T]$ insbesondere ein reeller Vektorraum ist. Wir wählen ein festes Element $r$ aus $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass die Familie $((T-r)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist.
**Hinweis:** Für ein Polyom $P = \sum_{0\le k\le D} a_k T^k$ vom Grad $D$ ist die formale Ableitung

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \sum_{1\le k\le D} a_k k T^{k-1}.$$

(b) Zeige, dass die Familie $((T-r)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathbb{R}[T]$ bildet.
**Hinweis:** Zeige induktiv über den Grad $D$ des Polynoms $P$, dass $P = b_D(T-r)^D + Q$, wobei $Q$ Grad höchstens $D-1$ hat.

**Aufgabe 2** (5 Punkte). Betrachte folgende Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,5,4) \quad v_2 = (1,5,3) \quad v_3 = (17,85,56) \quad v_4 = (1,5,2) \quad v_5 = (3,16,13)$$

(a) Zeige, dass $\{v_1,\dots,v_5\}$ ein Erzeugendensystem ist. Ist es linear unabhängig?

(b) Finde mit der Gauß-Eliminationsmethode eine Teilmenge von $\{v_1,\dots,v_5\}$, welche eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte). Sind die Vektoren

$$u_1 = (1,4,0,-5,1)\ ,\ u_2 = (1,3,0,-4,0) \text{ und } u_3 = (0,4,1,1,4)$$

linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$?
Wenn ja, finde eine Basis von $\mathbb{R}^5$, welche $\{u_1,u_2,u_3\}$ ergänzt.

**Aufgabe 4** (3 Punkte).
Wir nehmen an, dass sich der $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ als eine direkte Summe $V = U_1 \oplus U_1$ zweier transversaler Unterräume $U_1$ und $U_2$ schreiben lässt. Gegeben einen Unterraum $W$ von $V$, ist $W = W_1 \oplus W_2$ mit $W_1 = W\cap U_1$ und $W_2 = W \cap U_2$?

---

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.